Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 2 09.04.2018

Präsenzaufgaben

1.) Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix an.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$ (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$ (d) $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

2.) Sind die folgenden Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(a) Es ex. eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und f ist ein Isomorphismus.

(b) Eine Abbildung ist genau dann linear, wenn sie bijektiv ist.

(c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$ ist ein Isomorphismus.

(d) Es ex. eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $dim(Kern(f)) = 2$ und $rang(f) = 3$.

3.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixprodukte $AB, BA, A^TB, B^TA, A^TA, AA^T$, falls sie existieren. Welche der Matrixprodukte existieren auf jeden Fall, unabhängig von der Zeilen- und Spaltenzahl von A? Begründen Sie Ihre Aussagen.

4.) Sei $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2} \vec{v}$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ für die euklidische Norm.

(a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).

(b) Zeigen Sie: S ist linear.

(c) Stellen Sie eine Vermutung auf, welches die Umkehrabbildung von S ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung und somit auch, dass S ein Isomorphismus ist.

5.) Versuchen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$$

aufzustellen und zeigen Sie anschließend, dass es sich um keine lineare Abbildung handelt.

Hausaufgaben (Abgabe bis 15.04.2018)

6.) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus darstellt, falls f gegeben ist durch:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

7.) Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.
$f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3, f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)dx$ und $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2, g(p(x)) = p'(x)$. Im Werte und Definitionsbereich ist jeweils die Basis der Monome zu verwenden. $\int_{C=0}$ bezeichnet hier die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten $C = 0$.

<u>Beispiel:</u> $p(x) = x^2 + 2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und somit $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\int_{C=0} p(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

8.) Drehungen sind lineare Abbildungen. Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix A_ϕ zu der linearen Abbildung f_ϕ, die einen Vektor innerhalb des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel ϕ dreht.

(a) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_{\pi/6}(\vec{v}_1)$ und $f_{\pi/6}(\vec{v}_2)$, also die um $\frac{\pi}{6}$ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

(b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix $A_{\pi/6}$ zu $f_{\pi/6}$ auf.

(c) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_\phi(\vec{v}_1)$ und $f_\phi(\vec{v}_2)$, also die um einen beliebigen Winkel ϕ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

(d) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix A_ϕ zu f_ϕ auf.