Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 13 17.01.2018

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben sei ein Vektorraum V und eine Menge M von Vektoren aus V. Untersuchen Sie, die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M“, „M bildet eine Basis“, „M bildet ein Erzeugendensystem“ und „M bildet ein minimales Erzeugendensystem“:

(a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

		impliziert die Eigenschaft				
	Eigenschaften	lin. un- abh.	Basis	ES	OGB	ONS
Gegeben	linear unabhängig					
	Basis					
	Erzeugendensystem (ES)					
	Orthogonalbasis (OGB)					
	Orthonormalsystem (ONS)					

(b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

2.) Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^\perp$. Schreiben Sie

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $\vec{w} = (\vec{w_1} + \vec{w_2})$ mit $\vec{w_1} \in W$ und $\vec{w_2} \in W^\perp$.

3.) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden. Geben Sie ggf. die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis an.

4.) Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

5.) Gegeben Sei ein Vektorraum V. U und W seien Untervektorräume von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $U = (U^\perp)^\perp$

(b) $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$

(c) $W^\perp \subset U^\perp \Rightarrow U \subset W$

Hausaufgaben (Abgabe bis 23.01.2018)

6.) Betrachten Sie $C[0, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Zeigen Sie, dass f_k und f_l für $k \neq l$ orthogonal sind.

Hinweis:

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) \qquad ; & a = b \end{cases}$$

7.) (a) Zeigen Sie, dass mit dem Standardskalarprodukt die folgenden Vektoren jeweils eine Orthonormalbasis bilden

i.
$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

ii.
$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} sin(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

8.) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?