Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 12 10.01.2018

Präsenzaufgaben

1.) Sind die Polynome

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 7$$
$$f_2(x) = -3x^2 + x + 4$$
$$f_3(x) = -6x^2 + 13x - 5$$

linear unabhängig?

2.) Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

3.) $v_1, \ldots, v_n$ mit $v_i \neq 0$ seien n paarweise orthogonale Vektoren, d.h.

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Tipp: Klären Sie zunächst, was passiert, wenn man eine Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

skalar mit einem v_k für $1 \leq k \leq n$ multipliziert.

4.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_0, f_1, f_2\}$, gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = (x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

5.) Zeigen Sie, dass durch $||\vec{x}|| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ eine Norm für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

6.) Gegeben seien zwei Vektoren $a,\ b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) a und b sind linear unabhängig
(b) es existiert ein Indexpaar $i \neq j$ mit $a_ib_j - a_jb_i \neq 0$

Hausaufgaben (Abgabe bis 16.01.2018)

7.) Welche der folgenden Funktionen sind linear abhängig bzw. linear unabhängig?

(a) $f_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -2 + x + x^2$, $f_3(x) = -7 + x^2$

(b) $f_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -3 + 5x + 4x^2$, $f_3(x) = -2 + 8x + 5x^2$

8.) Weisen sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $< x, y >: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt?

(a) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} e^{x_iy_i}$

(c) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

(d) $< x, y >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

9.) Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$. P_2 beschreibt die Polynome von höchstens zweiten Grades.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

i. $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

ii. $p(x) = x - x^2$ und $q(x) = 7 + 3x + 3x^2$

Tipp: Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zu verwenden sind.