Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 11 20.12.2017

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a, b, c)$?

2.) **Typische IHK-Aufgabe.** Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A, B, C liegen, in Hessescher Normalform.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE $= 10$ m).

3.) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

4.) Gegeben sind n Untervektorräume $U_i,\ i = 1, ..., n$ eines Vektorraums V. Es sei $U = \{u_1 + ... + u_n | u_i \in U_i, i = 1, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

Zeigen Sie weiter, dass jede Darstellung $u \in U,\ u = \sum_{i=1}^n u_i$ eindeutig ist, wenn aus $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$ folgt, dass $u_i = 0$ für alle $i = 1, ..., n$. Folgt daraus $U_i \cap (U_{i+1} + ... + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, ..., n-1$?

$U_{i+1} + ... + U_n = \{\sum_{j=1+i}^n u_j | u_j \in U_j, j = 1 + i, ..., n\}$

5.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) Gebe eine Basis des Untervektorraums U an.

(b) Ergänze diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

6.) **Typische IHK-Aufgabe.** Ein Flugzeug benötigt bei Gegenwind bis zum Abheben 500 m und startet dann in Richtung $(3;1)$. Bei Rückenwind hebt das Flugzeug erst nach 750 m ab und startet in Richtung $(4;1)$. Am Ende der 1 km langen Startbahn steht ein 10 m hoher Beleuchtungsmast. Wie groß ist der Mindestabstand des Mastes zu der Flugbahn bei Gegen- bzw. Rückenwind?

Hausaufgaben (Abgabe bis 09.01.2018)

7.) Geben Seien vier Punkte in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1, \alpha - 2);\ (-1, 2 - \alpha);\ (-2; 25 - 8\alpha);\ (\frac{1}{2}; \frac{\alpha - 5}{8})$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α ein Interpolationspolynom möglichst geringen Gerades. Geben Sie den Grad des Polynoms in Abhänigkeit von α an.

8.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten.

9.) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ f_2(x) &= x^2 - x - 2 \\ f_3(x) &= \alpha \cdot e^x + 1. \end{aligned}$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht? Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.