Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 8 29.11.2017

Präsenzaufgaben

1.) Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 1 \\ 1 & \circ & 0 \\ 1 & \circ & 1 \end{array}$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

2.) Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten so weit wie möglich:

(a) $\det(\alpha\vec{a}, \alpha\vec{b}, \alpha\vec{c})$

(b) $\det(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c})$

(c) $\det(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c})$

3.) Bildet $\mathbb{R}_{>1}$ mit der Verknüpfung

$$x \circ y = xy - x - y + 2$$

eine abelsche Gruppe?

4.) Es sei $M = \{x; x \neq 0; x = a + b \cdot \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass die Menge M bzgl. der üblichen Multiplikation der reellen Zahlen eine Gruppe bildet.
Tipps:

- Wichtig ist die Abgeschlossenheit. Welche beiden Gleichungen müssen gelten, damit $x \cdot y = (a_x + \sqrt{2}b_x) \cdot (a_y + \sqrt{2}b_y) = 0$?
- Warum führen diese Gleichungen zu einem Widerspruch, wenn $a, b \in \mathbb{Q}$? Wie folgt daraus die Abgeschlossenheit?
- Verwenden Sie bei der Berechnung des inversen Elements die 3. binomische Formel.

Bildet die Menge M einen Körper, wenn man zusätzlich als Addition die übliche Addition von reellen Zahlen definiert?

5.) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ bilden.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und

$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und

$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

6.) Gegeben Sind die zwei Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$ und $E_2 : \vec{a} + \mu\vec{b} + \lambda\vec{c}$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie die Gerade g_1 als Schnittmenge der Ebenen. Bestimmen Sie den Abstand von Punkt A zu g_1. $\vec{a}$ ist Ortsvektor zu A.Weiter sei $E_3 : \vec{a} + \mu\vec{d} + \lambda\vec{c}$ mir $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie den Abstand von E_3 zu E_1.

Hausaufgaben (Abgabe bis 5.12.2017)

7.) Durch 3 Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) soll eine Kurve der Form

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$$

gelegt werden. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie, in welchem der beiden folgenden Fälle die Lösung eindeutig ist.

(a) $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 6)$

(b) $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$

Tipp: Benutzen Sie die Determinantenregeln.

8.) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ ist folgende Multiplikation definiert:

$$X \circ Y = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Kann man die Menge $\mathbb{R}^2$ so einschränken, dass sie bzgl. der Operation $\circ$ eine Gruppe bildet? Wie lautet in diesem Fall das neutrale Element und wie jeweils das inverse Element?

9.) Bildet $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

10.) Verifizieren Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+$ aller echt positiven reellen Zahlen mit den Verknüpfungen $x \oplus y := xy$ und $\lambda \odot x := x^\lambda, x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist.