Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 6 — 15.11.2017

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben seien vier Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Liegen die vier Punkte auf einer Ebene?

(b) Bestimmen Sie α so, dass der Punkt $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ auf der Ebene liegt.

(c) E_{ABC} sei die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen. Bestimmen Sie β so, dass $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E_{ABC} identisch sind. Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene E_{ABC} an.

2.) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch den Punkt $A = (1, -2, 1)$, die senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht und den kürzesten Abstand dieser Ebene vom Nullpunkt.

3.) Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$ die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform)

(a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $E_2 : 2x_1 + x_2 = 7$

(c) $E_3 : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

(d) Ebene E_4 durch die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 3; 2)$ und $R = (0; 2; 1)$

(e) $E_5 : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 4$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.) **Typische IHK-Aufgabe.** Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.
Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix} .$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt (Hinweis: $y = 0$). Wo liegt der Austrittspunkt (Hinweis: $y = 4$)? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

5.) Bestimmen Sie die Spiegelung P' von Punkt $P = (1/1/2)$ an der Ebene E_{ABC} aus Aufgabe 1).

Hausaufgaben (Abgabe bis 21.11.2017)

6.) Untersuchen Sie jeweils, ob folgende Ebenen- bzw. Geradengleichungen die selben Ebenem bzw. Geraden beschreiben:

(a)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2x + 2y - 2z = 2$$

(c)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -t_2 x + t_1 y = 0$$

7.) **Typische IHK-Aufgabe.** Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, 8, 0)$, $B = (0, 8, 0)$ und die Spitze $S = (2, 4, 8)$. Von der Ecke B verläuft zum Punkt $P = (4, 6, 4)$ ein Stahlträger.

(a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS} liegt, die die Pyramidenseite OAS enthält.

(b) überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

8.) Der Rennflieger Rudi möchte möglichst schnell von seinem Startpunkt $S = (0/1/8)$ aus den Zielpunkt $Z = (4/7/0)$ erreichen. Er weiß, dass sein Kurs optimal ist, wenn der Kurs den gleichen Abstand zu zwei Hindernissen $H_1 = (1/2/2)$ und $H_2 = (3/6/6)$ besitzt. Kann Rudi seinen Kurs entlang einer Geraden wählen?

Hinweis: Bestimmen sie zunächst eine Ebene der Punkte mit gleichem Abstand zu den Hindernissen.