Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

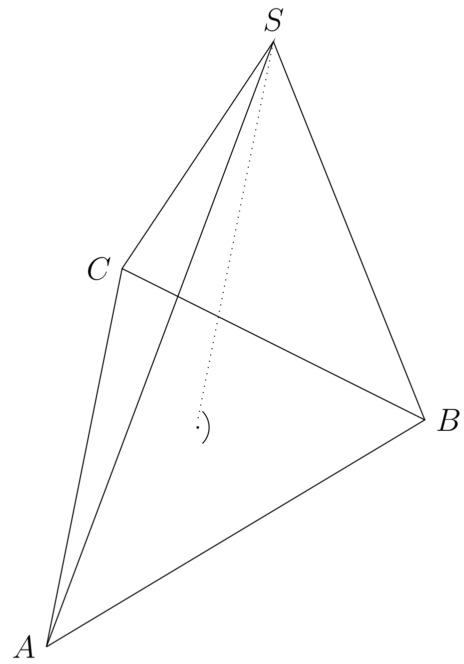
Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 5 8.11.2017

Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

2.) Gegeben ist die folgende Pyramide (siehe Skizze). Es seien $A = (2/1/0)$, $B = (3/4/0)$ und $C = (-2/0/1)$. Zudem beträgt die Höhe der Pyramide $h = 5$ LE. Das senkrechte Lot von der Pyramidenspitze S trifft im Schwerpunkt des Dreiecks auf die dreieckige Grundfläche ABC. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, das Volumen der Pyramide sowie jeweils den Winkel zwischen dem Lot und den Seitenkanten $\vec{SA}$,$\vec{SB}$und $\vec{SC}$.



3.) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte

(a) $A = (-2; 1)$ und $B = (2; 2)$

(b) $A = (1; 2; 3)$ und $B = (3; 1; 2)$

4.) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.$$

5.) Gegeben Seien drei Geraden:

$$
\begin{aligned}
g_1 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \\
g_2 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} \\
g_3 : \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Weiter seien a,b und c reelle Zahlen. Was muss für diese gelten, damit sich die Geraden in einem Punkt schneiden.

Hausaufgaben (Abgabe bis 14.11.2017)

6.) Zeigen Sie, dass das Volumen eines Tetraeders, der von drei nicht in einer Ebene liegenden Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, durch

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$$

gegeben ist.

7.) Peter versucht sich mithilfe einer Karte zu orientieren. Er weiß, dass er vom Startpunkt$(0/0)$ aus 2km in Richtung Osten und 3 km in Richtung Norden gelaufen ist. Er versucht nun die Richtung zu bestimmen, in die er gehen muss um sich in einem verabredeten Punkt mit seiner Freundin Petra zu treffen.
Folgendes ist über den Treffpunkt bekannt. Er liegt auf einem geradlinigen Wanderweg. An dem Wanderweg liegen zwei Gasthäuser, eines 2km südlich von ihm und eines 10 km östlich. Der Treffpunkt liegt auf dem Wanderweg und er erinnert sich, dass er 5 km (Luftlinie) von diesem entfernt ist, wo treffen sich Peter und Petra? Der Treffpunkt befindet sich östlich des ersten Gasthauses.
Auf dem Wanderweg ist Peter doppelt so schnell als abseits des Weges, soll er den direkten Weg wählen oder zunächst zur Südlichen Gaststädte laufen und von dort aus den Weg benutzen?

8.) Erweitern Sie die Klasse `VectorRn` aus den letzten Hausaufgaben um die beiden Methoden

```
public static double getWinkel (VectorRn v1, VectorRn v2)
```

und

```
public static VectorRn projiziereV1AufV2 (VectorRn v1, VectorRn v2).
```

Die Methode `getWinkel` soll den Winkel zwischen den beiden Vektoren `v1` und `v2` (im Bogenmaß) berechnen und zurückgeben. Die Methode `projiziereV1AufV2` soll die orthogonale Projektion des Vektors `v1` auf den Vektor `v2` zurückgegeben, ohne `v1` und `v2` zu verändern.
Werfen Sie wieder Exceptions, wenn die aufgerufene Operation nicht durchführbar ist.

Betrachten Sie die folgenden Testfälle und implementieren Sie diese innerhalb einer Main-Methode innerhalb einer Klasse `VectorRnTest` :
$\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{b} = (5, 6, 7, 8)^T$, $\vec{c} = (5, 2)^T$, $\vec{d} = (-2, 5)^T$

Eingabe	Ausgabe
$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$	0.25019592042251176
$\measuredangle(\vec{c}, \vec{d})$	1.5707963267948966 bzw. $90.0°$
Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{d}$	$(0, 0)^T$