Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 4 — 2.11.2017

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ für die Vektoren

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie außerdem für die Teile a) und b) $\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{-b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a}$, $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$. In welche Richtung zeigt der letzte Vektor?

2.) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen eines Würfels und den Kanten.

3.) Die Vektoren $\vec{v}_n \in \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_n = \vec{v}_{n-1} \times \vec{a}, \text{ wobei } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeige Sie, dass gilt:

$$\vec{v}_{2n} = (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 7.11.2017)

4.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die folgenden Vektoren definiert:

$$\vec{p}_0 = \vec{b},\ \vec{z}_n = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}_n),$$

Weiter sind die Vektoren $\vec{p}_{n+1}$ rekursiv definiert durch

$$\vec{p}_{n+1} = \frac{\langle \vec{z}_n, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \vec{b},\ n = 0, 1, 2, \ldots \ \left(\vec{p}_{n+1} \text{ ist die Projektion des Vektors } \vec{z}_n \text{ auf } \vec{b} \right).$$

(a) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende explizite Formel gilt:

$$\vec{p}_n = (-2)^n \vec{b},\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

5.) Gegeben sind 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{p}$ als Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und dann den Vektor $\vec{q}$, die Projektion von $\vec{p}$ auf $\vec{b}$. Berechnen Sie daraus

$$\frac{\|q\|}{\|p\|}$$

und vereinfache das Ergebnis so, dass darin nur noch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorkommen. Kann man das Ergebnis geometrisch interpretieren?

6.) Geben Sie die komplette Definition eines Skalarproduktes in Form einer Audio- oder Videoaufnahme wieder. Lesen Sie dabei möglichst nicht die mathematische Schreibweise vor, sondern beschreiben sie sie in Ihren eigenen Worten.
Abgaben werden nur mit einer maximalen Länge von 75s und im wav- oder mp3- bzw. mp4-Format akzeptiert.
Hinweis: Mit dem Tool http://online-audio-converter.com/de/ lassen sich unterschiedliche Audio-Formate ineinander konvertieren.