Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 2 — 18.10.2017

Präsenzaufgaben

1.) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Weiter sei $\lambda = 6$, $\mu = \frac{32}{5}$. Stellen Sie nun $\vec{c}$ als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

(b) Ist eine solche Darstellung auch für $\lambda = 12$, $\mu = \frac{2}{5}$ möglich?

(c) für welche Werte von λ und μ stehen $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander?

2.) Auf einem nach Norden ausgerichteten Grundstück der Größe $200 * 100$ Meter ist ein Schatz vergraben worden. Seine Lage ist von der linken unteren Ecke gesehen im Punkt $(50, 80)$ (Angabe in Metern). Das Grundstück kann wegen starker Kontamination nicht betreten werden.
Der Schatz soll von einem automatischen unbemannten Bagger gehoben werden, der sich in der unteren linken Ecke befindet. Der Bagger kann nicht frei gesteuert werden, vielmehr orientiert er sich nur an zwei Satelliten, die im Nordosten und Norden stehen. Welche Koordinaten (in Metern) muss man dem Bagger eingeben?

3.) Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren und beliebige Skalarprodukte richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\vec{a} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \vec{a}^2 \cdot \vec{c}$

(b) $\vec{b} = \sqrt{\vec{b}^2}$

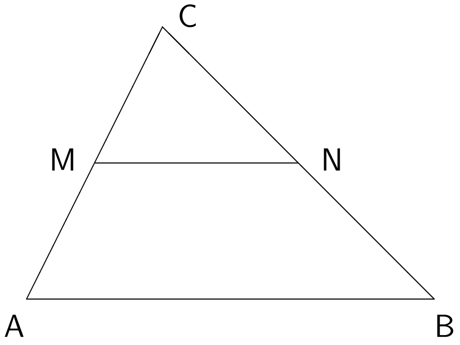
(c) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

(d) $\dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} = \vec{a}$

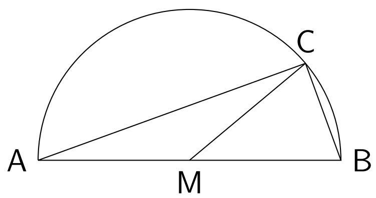
(e) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{3}{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

4.) In einem Dreieck ABC sind M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (siehe Zeichnung). Zeigen Sie: Die Strecke $\overline{MN}$ ist parallel zur Dreiecksseite $\overline{AB}$ und halb so lang wie diese.



5.) Beweisen Sie, dass jedes Dreieck A,B,C, das wie in der Skizze dargestellt konstruiert wurde, rechtwinklig ist.(Satz des Thales)
Dabei liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über A und B.



Hinweis: Sie erkennen am Skalarprodukt zweier Vektoren ob die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für einen Vektor $\vec{a}$ gilt fü das euklidische Skalarprodukt und die euklidische Norm $< \vec{a}, \vec{a} >= ||\vec{a}||^2$

6.) Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0, 1)$, $B = (0, 7)$ und $C = (4, 9)$ den gleichen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|\vec{p} - \vec{a}\| = \|\vec{p} - \vec{b}\| = \|\vec{p} - \vec{c}\|$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 24.10.2017)

7.) Man beweise, dass sich in einem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierenden zweier Seiten im Verhältnis 2:1 teilen.

8.) Schreiben Sie eine Klasse `VectorRn`, die die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ symbolisiert, mit folgenden Methoden:

```
public VectorRn add (VectorRn v2)

public VectorRn mult (double d).
```

`add` soll dabei die Addition des `this`-Objektes mit dem Vektor `v2` und `mult` die Multiplikation des `this`-Vektors mit dem Skalar `d` durchführen und zurückgeben. Das `this`-Objekt soll dabei jeweils unverändert bleiben.
Dabei soll die gewohnte komponentenweise Addition und Multiplikation verwendet werden.
Werfen Sie im Falle nicht konsistenter Dimensionen bei der Addition eine `RuntimeException`.
Halten Sie sich an die Namenskonventionen.

Betrachten Sie die folgenden Testfälle:
$\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{b} = (5, 6, 7, 8)^T$, $\vec{c} = (1, 2)^T$, $d = 3$

Eingabe	Ausgabe
$\vec{a} + \vec{b}$	$(6, 8, 10, 12)^T$
$\vec{a} + \vec{c}$	Exception
$\vec{a} * d$	$(3, 6, 9, 12)^T$

9.) Erweitern Sie die Klasse `VectorRn` aus der letzten Hausaufgabe um die Methoden

```
public static double scalarProd (VectorRn v1, VectorRn v2)
```

und

```
public double getNorm ().
```

`scalarProd` ist eine statische Methode, die das Standard-Skalarprodukt der beiden Parameter `v1` und `v2` berechnen und zurückgeben soll. Werfen Sie im Falle nicht konsistenter Dimensionen wieder eine `Exception`.
`getNorm` soll die Standardnorm des `this`-Objektes bzgl. des Standardskalarproduktes berechnen und zurückgeben. Verwenden Sie zur Berechnung die Methode `scalarProd`.

Betrachten Sie die folgenden Testfälle:
$\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{b} = (5, 6, 7, 8)^T$, $\vec{c} = (1, 2)^T$

Eingabe	Ausgabe
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	70.0
$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$	Exception
$\|\vec{a}\|$	5.477225575051661