Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 15 — 10/11.07.2017

Präsenzaufgaben

1.) Welche der im Folgenden genannten Abbildungen sind quadratische Formen? Stellen Sie gegebenenfalls die zugehörige (symmetrische) Matrix A auf.
Ist A positiv definit, negativ definit oder indefinit?

(a) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$

(b) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 4$

(c) $f(\vec{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - 20x_5$

(d) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_3^2 + x_1x_4$

2.) Die Matrix A habe folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \{-2, 2\}$ und $b \in \{-1, 0, 1\}$. Für welche a, b ist die Matrix A

(a) positiv definit,

(b) negativ definit,

(c) indefinit?

3.) Zeigen Sie, dass sämtliche Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix A positiv sind.

Tipp: Gehen Sie von der quadratischen Form aus und setzten Sie $\vec{x} = \vec{e}_i$. Müssen die anderen Matrixelemente auch positiv sein?

4.) Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

(a) $f(\vec{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$

(b) $f(\vec{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_1x_4 - 3x_2x_1 + x_2x_4 - 2x_3x_1 + x_3x_2 + 4x_3^2 - 3x_3x_4 + 2x_4x_1 - 5x_4x_2 + x_4x_3 - 5x_4^2$

Ermitteln Sie jeweils die zugehörige symmetrische Koeffizientenmatrix A.

5.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die sich durch eine Spiegelung an der Achse durch den Ursprung mit dem Einheitsvektor

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_2$$

ergibt, wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^2$ darstellen.

(a) Wie lautet die Abbildungsmatrix A von f bzgl. der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?
(Hinweis: $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 60° = \frac{1}{2}$.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und die Eigenvektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ von A.

(c) Sei nun $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ die Basis eines neuen Koordinatensystems B'. Wie lautet die Matrix A' von f in diesem KO-System?

Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe)

6.) Erweitern Sie die Klasse `QuadMatrix` um die Konstanten

```
public static final int DEFINITHEIT_POSITIV = 1;
public static final int DEFINITHEIT_INDEFINIT = 0;
public static final int DEFINITHEIT_NEGATIV = -1;
public static final int DEFINITHEIT_KEINE_AUSSAGE = -2;
```

und eine Methode

```
public int bestimmeDefinitheit (),
```

die je nach Definitheit der aktuellen `QuadMatrix` die entsprechende der obigen Konstanten zurückgibt. Beachten Sie dabei, dass das Hurwitz-Kriterium nur für symmetrische Matrizen funktioniert. Definieren Sie in einer Testmethode (z.B. main) zu jedem Fall je eine symmetrische (2×2)-Beispielmatrix.

Hinweis 1: Überlegen Sie zunächst genau, in welchen Fällen das Hurwitz-Kriterium positiv Definitheit, negativ Definitheit und Indefinitheit garantiert. In allen anderen Fällen kann man keine Aussage treffen.

Hinweis 2: Liegt Ihnen keine Methode zur Bestimmung einer Determinante vor, so gehen Sie davon aus, dass die Klasse `QuadMatrix` eine Methode `det_laplace()` besitzt, die die Determinante der aktuellen `QuadMatrix` bestimmt.