FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2015, am 10.07.2015

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ {x_1}^2 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$$

nicht linear ist.

b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 2 \cdot x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

i) Stellen Sie die Abbildungsmatrix A auf.

ii) Berechnen Sie $Kern(A), Bild(A)$ und $Rang(A)$.

iii) Geben Sie eine Basis von $Bild(A)$ an.

Aufgabe 2

Bei der TCO-Betrachtung (Total Cost of Ownership) werden die Gesamtkosten der Programmierung, also insbesondere auch die Arbeitszeit der Programmierer, bestimmt. Für die Frage, ob sich die Weiterentwicklung eines bereits bestehendes Programm finanziell lohnt, sollen die Gesamtkosten $K(n)$ in Abhängigkeit der Anzahl der Entwickler n beleuchtet werden. Zwischen beiden Größen wird ein linearer Zusammenhang

$$K(n) = c + d \cdot n$$

angenommen. Bestimmen Sie anhand der folgenden Beobachtungswerte des Programms die besten Schätzer für c und d nach der Methode der kleinsten Quadrate.

# Programmierer n	0	1	2
Gesamtkosten $K(n)$	10	4	4

Hinweis: 0 Programmierer bedeutet, dass das Programm nicht weiterentwickelt wird.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Matrizen:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $det(U) = -1$ und $det(V) = 4$.

b) Bestimmen Sie $det(U^T)$ und $det(U^2)$.

c) Bestimmen Sie $det(-2 \cdot V)$.

d) Bestimmen Sie $det(U^{17} \cdot V)$.

e) Berechnen Sie $det(U + V)$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 5

Eine Matrix A besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A.

Aufgabe 6

Bei einer Autorennsimulation werden zur Transformation die drei symmetrischen Matrizen $G, T, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ genutzt. Ihnen fällt auf, dass

- $\langle x, Gx\rangle = {x_1}^2 - 4 \cdot x_1 x_2 + 5 \cdot {x_2}^2$,
- T die Eigenwerte -1 und 3 hat und
- $det(A) = 2$ sowie die Komponente a_{11} in der ersten Zeile und ersten Spalte gleich 1 ist.

a) Untersuchen Sie, welche der genannten Matrizen positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Untersuchen Sie jeweils für G, T und A, ob die Matrizen damit eindeutig bestimmt sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff "Lineare Abbildung".

Sei $\mathcal{P}_k$ die Menge aller reellen Polynome vom Höchstgrad k und $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{P}_{m+n}$ definiert durch

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{i+j} .$$

b) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

c) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

d) Zeigen Sie, dass f für $n, m \geq 2$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe “Eigenwert” und “Eigenvektor”.

b) Sei die reelle quadratische Matrix A zerlegt in $A = USV^T$ mit einer Diagonalmatrix S und zwei orthogonalen Matrizen U und V.

- Zeigen Sie, dass die Spalten von U die Eigenvektoren von AA^T und die Spalten von V die Eigenvektoren von A^TA bilden.
- Zeigen Sie dabei auch, dass die Eigenwerte sowohl von AA^T als auch A^TA die Quadrate der Hauptdiagonalelemente von S sind.