FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra II, SS 2014, am 04.07.2014, 09.15 - 11.15 Uhr

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1
Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ die kanonische Basis ist.

(a) Man bestimme die Abbildungsmatrix A.

(b) Bestimmen Sie $Kern(A)$.

(c) Man berechne $Rang(A)$ nach der Dimensionsformel.

(d) Bestimmen Sie das $Bild(A)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das lineare Gleichungssytem für $a = 3$ und $b = -9$.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

- genau eine Lösung,
- keine Lösung,
- unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 3
Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind.

(b) Wie lauten die Eigenwerte?

(c) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit oder indefinit? Begründen Sie Ihre Behauptung.

(d) Diagonalisieren Sie A.

(e) Berechnen Sie A^{1001}.

Aufgabe 4

Über der ansonsten ereignisarmen Hocheifel wird eines Nachts ein Ufo mehrfach gesehen. Trägt man die Stellen, an denen das Ufo gesichtet wurde, in das Koordinatensystem einer Landkarte ein, liegen folgende Daten vor:

Zeit der Sichtung	Koordinaten
03.07.2014, 22:00 Uhr	$(-2, 2)$
03.07.2014, 23:00 Uhr	$(2, 0)$
03.07.2014, 24:00 Uhr	$(2, -4)$
04.07.2014, 01:00 Uhr	$(8, 0)$

Die Flughöhe des Ufos war nicht zu ermitteln und soll hier komplett ignoriert werden. Der Flugsicherung ist klar, dass die vorliegenden Ortsangaben ungenau sein müssen und unterstellt, dass sich das Ufo mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Linie bewegt. Bestimmen Sie den vermuteten Flugweg mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.
Der Flugweg $\vec{s}(t)$ werde durch

$$\vec{s}(t) = \vec{a} + t\,\vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

modelliert.

(a) Betrachten Sie die x- und die y-Komponente des Weges **getrennt voneinander** und bestimmen Sie die jeweiligen Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Stellen Sie dazu die Normalgleichungssysteme auf und lösen Sie diese.

(b) Bei welchen Koordinaten wird die Flugsicherung das Ufo am 04.07.2014 um 2:30 Uhr erwarten?

Aufgabe 5

(a) Definieren Sie den Begriff “orthogonale Matrix”.

(b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und eine obere Dreicksmatrix, d.h. alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen sind 0. Zeigen Sie:

- Q ist eine Diagonalmatrix.
- Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 1 oder -1.

(Tipp: Überlegen Sie zunächst, was bei $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ passiert.)

Aufgabe 6

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_2 a_2 - \cdots - b_n a_n$$

Aufgabe 7
Der Vektor $\vec{x}$ habe die Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis.

(a) Gegeben ist folgende Basis $\mathfrak{A}$:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathfrak{A}$ um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.
- Welche Koordinaten hat der oben gegebene Vektor bezüglich der Basis $\mathfrak{A}$?

(b) Die Basis $\mathfrak{B}$ ist gegeben durch

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie aus der Koordinatendarstellung $(\vec{x})_{\mathfrak{A}}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix die Koordinatendarstellung $(\vec{x})_{\mathfrak{B}}$.

Aufgabe 8
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$A^k = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \forall k \geq k_0$$

.

(a) Ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent? Welche Eigenwerte hat M?

(b) Zeigen Sie: Jede nilpotente Matrix A hat den Eigenwert 0.

(c) Zeigen Sie: Jede nilpotente Matrix A hat nur den Eigenwert 0. (Tipp: Was wäre, wenn es noch andere Eigenwerte gäbe?)