Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2017

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 13 — 26/27.06.2017

Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

2.) Bei welchen Werten a, b hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?

(b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?

(c) keinen reellen Eigenwert?

3.) **Typische IHK-Aufgabe.** In einem Land haben bei der letzten Wahl 50% der Wähler Partei A, 30% Partei B und 20% Partei C gewählt. Aus der Wahlforschung ergibt sich, dass je 10% der A-Wähler nun B und C wählen, 10% der B-Wähler A und 20% C wählen und nur die Hälfte der C-Wähler treu sind, aber 30% B wählen wollen.
Ermitteln Sie die Prozentwerte bei der nächsten Wahl durch Aufstellen einer Übergangsmatrix und Matrix-Vektor-Multiplikation. Auf welche stationäre Verteilung würde sich das Wahlergebnis einpendeln, wenn der Trend bei jeder Wahl gleich bliebe?

4.) Geben Sie eine Matrix an, die das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$$

hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 02.07.2017)

5.) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen folgende Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

6.) Eine Abbildung im $\mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert:
Ein gegebener Vektor $\vec{x}$ wird zuerst um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und anschließend an der y-Achse gespiegelt.

(a) Welcher Vektor wird auf sich selbst abgebildet?

(b) Die Abbildung welchen Vektors zeigt genau in die entgegengesetzte Richtung?

(c) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A auf.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Passen diese zu den Beobachtungen aus a) und b)?

7.) Im Jahr 1980 hatte Aahausen endlich die 100.000-Einwohner-Grenze geknackt und durfte sich Großstadt nennen, danach sollte die Einwohnerzahl für lange Zeit stagnieren. Während 1980 noch 80.000 Bürger in der Innenstadt und 20.000 in den Randbezirken lebten, war das Verhältnis zehn Jahre später 76.000 zu 24.000. Viele hatten das hektische Leben in der Großstadt satt, anderen wiederum war es am Stadtrand doch zu ruhig. Bis zum Jahr 2000 waren dann soviele Bürger umgezogen, dass nur noch 73.200 in der Innenstadt und 26.800 am Rand der Stadt wohnten. Der Umzugstrend war dabei gleichbleibend.
Ermitteln Sie aus den gegebenen Werten eine Übergangsmatrix, die angibt, welcher Anteil der Innenstadtbewohner innerhalb von zehn Jahren an den Stadtrand zieht und welcher Anteil der Randbezirkbewohner sich in die andere Richtung aufmacht. Wie wird das Verhältnis Innenstadtbewohner zu Randbezirkbewohner sich langfristig entwickeln, vorausgesetzt der Umzugstrend bleibt gleich?

8.) Gegeben sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x}_t$ Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.