Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 8 22/23.05.2017

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie det(A) sowohl nach dem Entwicklungssatz von Laplace als auch nach dem Gauß-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 8 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2.) Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \det(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots \text{ mit } D_0 = 1.$$

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil b) für n=2,3,4,5. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive)Formel für D_n an und beweisen Sie sie.

3.) Weisen Sie folgende Gleichung nach:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(c-a)(b-a)(d-b)(c-b)(d-c)$$

4.) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Unterdeterminanten und mit dem Gauß-Algorithmus die inverse Matrix von

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und vergleichen Sie den Rechenaufwand.

5.) Berechnen Sie die Determinante der folgenden $(n \times n)$-Matrix A mit den Elementen

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot min(i,j), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Schreiben Sie zunächst die Matrix für $n = 5$ hin.

Hinweis zur Berechnung: Es sind Spalten geeignet zu addieren.

Hausaufgaben (Abgabe bis 28.05.2017)

6.) Es seien A eine $n \times n$-Matrix und B eine $m \times m$-Matrix. Die Matrix C ist gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei C eine $((n+m) \times (n+m))$-Matrix ist, bei der die Matrix A links oben und die Matrix B rechts unten steht und die restlichen Plätze mit Nullen aufgefüllt sind. Zeigen Sie für $n = 1$ und $n = 2$, dass gilt:

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B).$$

7.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus

(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(c) mit dem Entwicklungssatz

8.) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrizen nach dem Gauß-Verfahren und mit dem Verfahren der Unterdeterminaten:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9.) Erweiterung der Klasse `QuadMatrix`:

(a) Erweitern Sie die Klasse `QuadMatrix` um eine Methode `det_laplace()`. Die Methode `det_laplace()` soll die Determinante mit Hilfe der Entwicklung nach Laplace berechnen. Schreiben Sie eine rekursive Methode, die die Determinante nach der ersten Zeile entwickelt.

(b) Schreiben Sie eine Testmethode, z.B. `main`, die eine zufällige `QuadMatrix` der Größe n erzeugt, wobei n der Eingabe des Benutzers überlassen bleibt.
Hinweis: Mit einer zufälligen Matrix ist hier eine Matrix gemeint, die aus ganzzahligen Zufallszahlen besteht, die zwischen -3 und 3 (jeweils einschließlich) liegen.

(c) Messen Sie für verschiedene (nicht zu große) Werte von n, die Zeiten, die die Berechnung der Determinante nach Laplace erfordert. Beurteilen Sie die Ergebnisse.

Überprüfen Sie die Funktionalität ihres Programms zunächst mithilfe der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Wert der Determinante dieser Matrix A ist 43. Führen Sie erst danach die Messung von Aufgabenteil c) durch.

Optionale Hausaufgabe (keine Abgabe)

10.) Erweitern Sie die Klasse `QuadMatrix`:

(a) Schreiben Sie eine Methode `det_leibniz()`, die die Determinante der Matrix mit Hilfe der Leibnizschen Formel berechnet.
Benutzen Sie z.B. eine Rekursion um die unbestimmte Anzahl der Summenbildungen darzustellen.

(b) Schreiben Sie eine Testmethode, z.B. `main`, die für eine Beispielmatrix die Determinante bestimmt.

(c) Messen Sie für verschiedene (nicht zu große) Werte von n, die Zeiten, die die Berechnung der Determinante nach Leibniz bzw. Laplace jeweils erfordert. Beurteilen Sie die Ergebnisse.