Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2017

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 4 24/25.04.2017

Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.) Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

3.) A sei eine 3×3-Matrix.

(a) Welche Beziehung $(=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq)$ besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und von A^3)?

(b) Was gilt für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

4.) Prüfen Sie, ob die folgende Vorschrift eine lineare Abbildung definiert. Geben Sie ggfs. den Kern und das Bild an und untersuchen Sie auf Injektivität und Surjektivität.

$$f : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \text{ wobei } a_i \text{ i-ter Koeffizient des Polynoms } p.$$

5.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert:

(a) $A \cdot B$ (b) $B \cdot A$ (c) $B \cdot C$ (d) $C \cdot B$
(e) $B \cdot C^T$ (f) $A \cdot C$ (g) $A \cdot C^T$ (h) $C^T \cdot A$
(i) $C \cdot B \cdot C^T$ (j) $A \cdot C \cdot B$ (k) $C^T \cdot A \cdot C$ (l) $B \cdot C \cdot A$
(m) $B \cdot C^T \cdot A$ (n) $C \cdot B \cdot A$

Begründen Sie Ihre Aussage und bestimmen Sie ggf. das Produkt der Matrizen.

6.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist. Stellen Sie eine Behauptung für A^n auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Hausaufgaben (Abgabe bis 30.04.2017)

7.) Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.) Berechnen Sie in Abhängigkeit von x den Kern, die Dimension des Kerns, den Rang und das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

9.) Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die *Projektion* p von $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung v (vgl. Lineare Algebra 1). Es gilt $p = \frac{\langle v,x \rangle}{||v||^2} v$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ die euklidische Norm bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P(x) = p$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.

(c) Berechnen Sie Bild(P) und geben Sie eine Basis des Bildes an. Vermeiden Sie dabei umfangreiche Rechnungen! Wie lautet rg(A)?

(d) Bestimmen Sie Ker(P) und deuten Sie Ker(P) geometrisch.

(e) Geben Sie eine Basis von ker(P) an! Tipp: Erinnern Sie sich an die Umrechnung der verschiedenen Ebenendarstellungen ineinander!

(f) Zeigen Sie, das P keine Umkehrabbildung besitzt.

10.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)x \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}.$$

11.) Bekanntlich bilden die Matrizen bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum. Implementieren Sie einen solchen Vektorraum anhand der folgenden Teilaufgaben. Definieren Sie geeignete Exceptions, die im Falle nicht erlaubter Operationen geworfen werden.

(a) Erstellen Sie eine Klasse `QuadMatrix`, die eine quadratische Matrix über dem Körper der reellen Zahlen symbolisiert. Diese soll nur ein privates Attribut a haben, wobei a ein quadratisches 2-dimensionales Array ist und die Matrixkoeffizienten enthält.

(b) Schreiben Sie einen Konstruktor, der aus einem entsprechenden Array eine `QuadMatrix` erstellt.

(c) Schreiben Sie einen Copy-Konstruktor
`public QuadMartix (QuadMatrix qm)`,
der eine Kopie von `qm` erstellt. Achten Sie dabei darauf, dass auch das Attribut a vollständig kopiert wird.

(d) Schreiben Sie eine Methode
`public int getDim()`,
die die Zeilen- bzw. Spaltenanzahl zurückgibt.

(e) Überschreiben Sie die Methode
`public String toString ()`,
so dass diese die Matrix als `String` in der Form des Beispiels $(1\ 2; 3\ 4)$ zurückgibt.

(f) Schreiben Sie eine Methode
`public QuadMatrix addiere (QuadMartix qm)`,
die zum `this-Objekt` eine Matrix addiert, jedoch das `this-Objekt` nicht verändert.

(g) Schreiben Sie eine Methode
`public QuadMatrix multipliziere (double lambda)`,
die ein Skalar mit der Matrix multipliziert, jedoch das `this-Objekt` nicht verändert.

Testen Sie ihr Programm mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie für die Matrixaddition die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und für die Multiplikation $\lambda = 5$.

Eingabe	Ausgabe
Bestimmung der Dimension	3
Addiere B zu A	$(3\ 1\ 4; 2\ -1\ 2; 3\ 5\ 3)$
Multipliziere A mit 5	$(5\ 10\ 15; 5\ 5\ 10; 15\ 10\ 10)$