Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 3 18.04.2017

Präsenzaufgaben

1.) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Finden Sie zu f eine Matrix A, so dass

$$f(x) = A \cdot x, \text{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie müsste man den Zielbereich wählen, damit die Abbildung surjektiv ist?

2.) Stellen Sie die Abbildungsmatrix zur Abbildung $f : P_2 \to P_3$ mit $f(p(x)) = p(x) \cdot x$ auf. Benutzen Sie dabei sowohl im Definitions- als auch im Wertebereich die Basis der Monome, also $\{1, x, x^2\}$ bzw. $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Beispiel als Hinweis:

$$p(x) = x^2 - 2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad f(p(x)) = x^3 - 2x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und somit

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 23.04.2017)

3.) Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix A_s zu der linearen Abbildung f_s, die einen Vektor innerhalb des $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse spiegelt.

(a) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_s(\vec{v}_1)$ und $f_s(\vec{v}_2)$, also die Spiegelung der kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$.

(b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix A_s zu f_s auf.

4.) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus darstellt, falls f gegeben ist durch:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

5.) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(\vec{x}) = A_t\vec{x}$ mit

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Mengen $M_n = \{t \in \mathbb{R} | rg(A_t) = n\}$ für $n = 1, 2, 3$.

6.) Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -3x+z \\ -x+2y+5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Bestimmen Sie Kern von F und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimmen Sie $dim(Bild(F))$.