Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 1 03./04.04.2017

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = |x|$$

sowie die Mengen $A = [-1; 1[$ und $B =]-1; 1]$. Bestimmen Sie $f(1)$, $f^{-1}(\{1\})$, $f(A)$ und $f^{-1}(B)$.

2.) Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sowie die Menge $A = [-1; 1] \times [0; 10]$.

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $f(A)$ und $f^{-1}(A)$.

3.) Schauen Sie sich im Script nochmals die Definiton für Injektivität und Surjektivität an, so daß Sie auf Nachfrage diese sowohl formal als auch bildlich nennen können. Nennen Sie dann je eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die

(a) weder injektiv noch surjektiv
(b) nur surjektiv aber nicht injektiv
(c) nur injektiv aber nicht surjektiv
(d) bijektiv

ist.

4.) Gegeben seien die Mengen

$$A = \{\text{Vater, Mutter, Sohn, Tochter}\}, \quad B = \{1948,\ 1976,\ 1950,\ 1978\}$$

sowie die Abbildung

$$f : A \ni x \to f(x) = \text{Jahrgang von } x \in B.$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen die Abbildungsvorschrift f erfüllen und ob die Abbildungen injektiv, surjektiv sowie bijektiv sind.

(a) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978

(b) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1975, Tochter hat Jahrgang 1978

(c) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

5.) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

6.) Die Abbildung $f : A \to B$, wobei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}$ sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \text{ mod } 17.$$

(a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

(b) Wie lautet der Kern von f?

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es, A und B zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?

Hausaufgaben (Abgabe bis 09.04.2017)

7.) Geben sind die folgenden Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

sowie die Mengen$A = [0, 5]$ und $B = [-5, 0]$.
Bestimmen Sie jeweils $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B), f^{-1}(B)$.

8.) (a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie: f ist eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: f ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^T$. Ist f eine lineare Abbildung? Ist f injektiv bzw. surjektiv? Wenn ja, was ist die Umkehrabbildung von f?

(c) Wir betrachten $\mathcal{C}[0, 1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Man zeige: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0, 1]$, d.h die Abbildung

$$\varphi_a : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_a(f) = f(a)$$

ist linear. Ist φ_a injektiv und surjektiv?

9.) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_2, |x_1|)$

10.) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie f ist linear

(b) Bestimmen Sie den Kern(f).

(c) Berechnen Sie das $Bild(f)$

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?