Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2016/2017

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 11 21.12.2016

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie einen dritten Vektor, so dass die 3 Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2.) Der Vektor x habe die Koordinaten $(1,2,3)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt.

3.) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale Lineare Hülle $L(a, b, c)$?

4.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) Gebe eine Basis des Untervektorraums U an.

(b) Ergänze diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

5.) (a) Zeigen Sie, dass die 3 Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Weiter sind die 3 Vektoren $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ gegeben:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus des Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

Hinweis: Dabei soll jeweils aus der Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ genau ein Vektor ausgetauscht werden.

Hausaufgaben (Abgabe bis 03.01.2017)

6.) Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Tupel von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

(a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(d) $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

7.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten.

8.) Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines 2-dimensionalen $\mathbb{R} - Vektorraums\ V$. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

9.) Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.