Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2015/2016

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 10 14.12.2016

Präsenzaufgaben

1.) Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linear unabhängig?

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man $\vec{c}$ durch $\vec{d}$ ersetzt mit

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(c) Sind die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{f}\}$ linear unabhängig mit

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}?$$

2.) Prüfen Sie, ob die auf dem Intervall [-1,1] definierten Funktionen $\{f_1, f_2, f_3\}$ linear unabhängig sind.

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{array} \right\}.$$

3.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ der reellen Funktionen genau dann linear unabhängig ist, wenn $\{f_1, f_1 + f_2, f_3\}$ linear unabhängig ist.

4.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

5.) Für welche x spannen die folgenden Vektoren den $\mathbb{R}^3$ auf und für welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 21.12.2016)

6.) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ f_2(x) &= x^2 - x - 2 \\ f_3(x) &= \alpha \cdot e^x + 1. \end{aligned}$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der Linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht. Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.

7.) Untersuchen Sie die drei gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8.) Schreiben Sie aufbauend auf den Klassen `VektorRn` und `Punkt` eine Klasse `GeradeR2`, die Geraden im $\mathbb{R}^2$ darstellen soll. `GeradeR2` erbt von der Klasse `AbstrakteEbene` und implementiert das Interface `Hyperebene`. Für die Klasse `GeradeR2` soll dazu neben den Methoden des Interface Hyperebene auch die Konstruktoren

```
public GeradeR2 (Punkt p1, Punkt p2)

public GeradeR2 (VektorRn n, Punkt p)
```

implementiert werden. Ersterer erzeugt die Gerade anhand der Vorgabe zweier Punkte, letztere anhand der Vorgabe eines Punktes `p` und eines Normalenvektors `n`.
Um das Interface zu implementieren, müssen Methoden zur Berechnung des Normalenvektors als Objekt der Klasse `VektorRn` und der Normalenform als Stringdarstellung implementiert werden. Testbeispiele und die entsprechenden Ausgaben finden Sie in der Klasse `GeradeR2Test`.
Die benötigten Klassen können unter
https://doc.itc.rwth-aachen.de/display/MATSE/Lineare+Algebra+I
gefunden werden. Die Klasse ist so zu erstellen, dass die Testklasse ausführbar ist. Stellen Sie sicher, dass ihre Klasse korrekte Ergebnisse liefert.