Yvonne Nix, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Grenzwerte bzw. Stetigkeit von Funktionen

1.) Zeigen Sie die Stetigkeit (mit der ε-δ-Definition) von:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

2.) Zeigen Sie mit der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass

$$f(x) = \begin{cases} -x^{-2} + \sqrt{3 + x^{-4}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ stetig ist.

3.) Untersuchen Sie auf Stetigkeit bzw. stetige Ergänzbarkeit:

a) $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{(x-3)^2}}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{für } \; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für } \; x = 1 \\ 2\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & \text{für } \; 1 < x < 4 \end{cases}$

4.) Untersuchen Sie auf Stetigkeit bzw. stetige Ergänzbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1} & , \text{ für } \; 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{ für } \; x = 0 \end{cases}$$

5.) Zeigen Sie die Stetigkeit (mit der $\varepsilon - \delta$-Definition) von:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) $f(x) = |x|$

6.) Mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition zeigen Sie, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{|x|}} & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion im Nullpunkt stetig ist.

7.) Untersuchen Sie auf Stetigkeit bzw. stetige Ergänzbarkeit:

a) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[5]{x-1}}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin(hx) & \text{für} \quad \infty < x < -1 \\ \sqrt{\cos(h^2x) - 1} & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{1-\cos(x)}{x} & \text{für} \quad 0 < x < \infty \end{cases}$

8.) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit bzw. stetige Ergänzbarkeit:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für} \quad x > 2 \\ x^2 - \frac{7}{2} & \text{für} \quad -1 < x < 2 \\ \frac{5}{2x} & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \\ 2\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{für} \quad 1 < x < 4 \end{cases}$

9.) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{falls} \quad x < -1 \\ 4x-1 & \text{falls} \quad x > -1 \end{cases} \quad x_0 = -1$

b) $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \qquad x_0 = 1$