Yvonne Nix, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Ableitungsregeln, lokale Extrema und Grenzwertsätze von l'Hospital

1.) Differenzieren Sie:

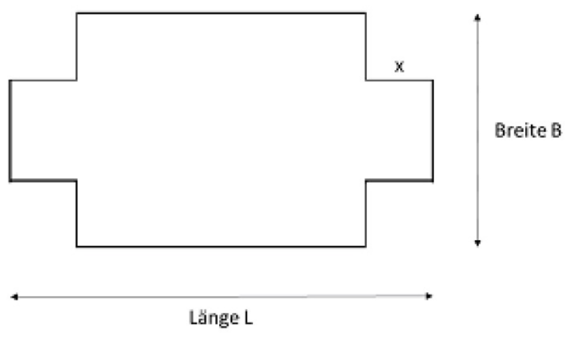
a) $f(x) = (x^3 - 3x)^4$ b) $f(x) = \cos^2(\frac{1}{x})$
c) $f(x) = e^{\sin x}$ d) $f(x) = x^3 \cos(x^2)$ e) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$
f) $f(x) = \frac{2x^2-3}{3x+1}$ g) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$
h) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ i) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
j) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\sin(2x)\right)$ k) $f(x) = \ln\left(\cos\left(\arctan(\frac{e^x-e^{-x}}{2})\right)\right)$
l) $f(x) = \ln\left(1 + \arcsin(\frac{1}{x})\right)$

2.) Bestimmen Sie im Intervall $(-2, 2)$ alle Minima und Maxima sowie alle Wendepunkte der Funktion $f(x) = |x^2 - 1|$ und fertigen Sie eine Skizze der Funktion an.

3.) Berechnen Sie die Grenzwerte (falls sie existieren):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$
e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{\ln 4711}{\ln x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$
i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}$

4.) Aus einem rechteckigen Blech der Länge $L = 16$ cm und der Breite $B = 6$ cm soll ein quaderförmiger, oben offener Behälter mit möglichst großem Fassungsvermögen geformt werden. Hierzu soll aus jeder Ecke ein gleich großes Quadrat der Kantenlänge x ausgeschnitten werden und der Rest zu einem Behälter zusammengebogen werden.



Wie lang muß die Kantenlänge x der ausgeschnittenen Quadrate werden?

5.) Bestimmen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tanh x}{\sin x}\right)^2$ b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{2x-x^4}}{\sqrt[4]{x^3}-1}$

6.) Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche a und Höhe h soll ein möglichst großes Volumen bei vorgegebener Oberfläche haben. Bestimmen Sie bei einer Oberfläche von $400cm^2$ die Höhe und die Länge der Grundseite der Pyramide (auch die quadratische Grundseite trägt zur Oberfläche mit bei) und das zugehörige maximale Volumen.
Tipp: Beim Auflösen und Einsetzen entsteht ein Produkt aus zwei Termen, multiplizieren Sie erst aus und leiten dann ab.