FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra I, SS 2013, am 05.07.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(14)
Aufgabe 2)		(14)
Aufgabe 3)		(14)
Aufgabe 4)		(14)
Aufgabe 5)		(14)
Aufgabe 6)		(14)
Aufgabe 7)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Ein Zauberkünstler “verblüfft“mit einem Rechentrick:
Er beauftragt einen Zuschauer damit, sich 3 beliebige Zahlen auszudenken und verdeckt auf einem Blatt aufzuschreiben.
Der Zauberer will auf Anhieb die 3 gedachten Zahlen erraten, wenn man ihm nur die 3 Summen von jeweils 2 gedachten Zahlen nennt. Der Zuschauer nennt als Summen die Zahlen 6, 11 und 15. Welches sind in diesem Fall die gedachten Zahlen ?

Aufgabe 2

V ist der von den folgenden Vektoren aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen b so, dass $\begin{pmatrix} 3b+6 \\ b^2+3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Element des Vektorraums V ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Menge $G = \mathbb{Q}_{>0}$ mitsamt der zugehörigen Verknüpfung

$$a \odot b := \frac{a \cdot b}{2}$$

eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4

Eine sturmgefährdete Fichte an einem gleichmäßig geneigten Hang soll mit Seilen an den Punkten A und B befestigt werden. Zur Berechnung dient ein kartesisches Koordinatensystem $(x, y, z)^T$, wobei z die relative Höhe zum Fuß der Fichte ist. Die Fichte wächst total gerade, also nur in z-Richtung.
Eine Einheit entspricht einem Meter. In diesem Koordinatensystem steht die Fichte am Punkt $P = (1, 4, 0)^T$ auf dem Boden. Die Befestigungspunkte liegen bei $A = (4, 6, -1)^T$ und $B = (2, 2, 1)^T$. Die Seile werden in 5 m Höhe an der Fichte befestigt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Welche Länge haben die beiden Seile?

c) Sind die jeweiligen Winkel zwischen den Seilen und der Hangebene größer als 30°?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Betrachtet wird der Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit folgendem Skalarprodukt

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \overline{b_k},\ \ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$$

Gegeben ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie zwei Vektoren aus $\mathbb{C}^3$, sodass zusammen mit dem gegebenenen Vektor eine orthogonale Basis des $\mathbb{C}^3$ entsteht.

Hinweise: $i^2 = -1$, $\overline{b_k}$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu b_k.

Aufgabe 7

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.
2			Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.
3			Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ heißen orthonormal, wenn $\vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$ und $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ gilt.
4			Vier Punkte aus dem $\mathbb{R}^3$ liegen immer in einer Ebene.