FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2013/2014, am 28.01.2014

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Auf einem Plakat wirbt eine Kaufhauskette aus Köln mit folgenden drei Angeboten in ihren drei Filialen:

In der Filiale A gibt es 1 Paar Sportschuhe Mike und 2 Paar Socken Adidies für 90 EUR.

In der Filiale B gibt es 2 Paar Sportschuhe Mike, 5 Paar Socken Adidies und 1 T-Shirt Gepard für 220 EUR.

In der Filiale C gibt es 1 Paar Socken Adidies und 1 T-Shirt Gepard. Der zugehörige Preis x ist aber nicht mehr lesbar.

Sie nehmen an, dass die den Angeboten zugrundeliegenden Einzelpreise der Artikel in allen Filialen identisch sind.

a) Berechnen Sie x.

b) Warum können Sie die den Angeboten zugrundeliegenden Einzelpreise der Artikel nicht ermitteln?

Aufgabe 2

In der Jülicher Zuckerfabrik werden die angelieferten Rüben von Anhängern abgekippt. Die Anhänger fahren dabei auf eine Plattform, die sich in der Ebene

$$E : z = 0$$

befindet. Anschließend wird die Plattform mitsamt Traktor und Anhänger gekippt, so dass die Rüben vom Anhänger in einen Auffangbehälter fallen können. Über der Plattform befindet sich ein ebenfalls ebenes Dach, das in der Ebene

$$E_d : 2x + 6z = 2 + 4 \cdot \sqrt{10}$$

liegt.

a) Zeigen Sie, dass die Plattform um den Winkel $\alpha \approx 18,4^\circ$ gekippt ist, wenn sie während des Kippvorgangs in der Ebene

$$E_k : x + 3z = 1$$

liegt.

Hinweis: $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

b) Zeigen Sie, dass das Dach parallel zur gekippten Plattform aus a) ist.

c) Zur Untersuchung, welche Anhänger hier abgeladen werden können, soll nun der Abstand des Daches zur gekippten Plattform bestimmt werden. Bestimmen Sie diesen Abstand.

Aufgabe 3

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie nach dem Verfahren von Gram-Schmidt daraus (in der angegebenen Reihenfolge) eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 4

Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Auf dem Weg nach Aachen muss Kaiser Karl in der gebirgigen Eifel auch Serpentinen durchqueren. Eine bestimmte Strecke besteht dabei aus einem geraden Teilstück zwischen den Punkten

$$A = (1, 6, 4) \quad \text{und} \quad B = (-7, 0, 2),$$

einem ebenfalls geraden Teilstück zwischen den Punkten

$$C = (4, 3, 1) \quad \text{und} \quad D = (0, 0, 0)$$

(und einer steilen Kurve zwischen den Punkten B und C).

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung des ebenen Hangs, auf dem sich beide Teilstücke befinden, d.h. die Ebene, in der sich A, B, C, D befinden.

b) An welcher Stelle P der Strecke zwischen A und B muss Karl von seiner Sänfte springen, wenn er von P aus die (unwegsame) Abkürzung direkt den Hang hinunter zum Punkt D nimmt und diese Abkürzung möglichst kurz sein soll?
Hinweis: Die Aufgabe lässt sich z.B. durch Aufstellen einer Hilfsebene lösen.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich bekanntlich als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Wie lautet die Linearkombination der drei Basisvektoren aus a), die den Vektor $(0, 11, -2)^T$ ergibt?

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff "Abelsche Gruppe". (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

b) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen ungleich 0. Man definiert für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}$ das *Hadamard-Produkt* (nach Jaques Hadamard, 1865-1963) durch

$$A \star B := (a_{ij} \cdot b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

also als komponentenweises Produkt von A und B. Anwendungen existieren z. B. in der Bildkompression.
Zeigen Sie: $(\mathcal{M}, \star)$ bildet eine Abelsche Gruppe.

Aufgabe 8

a) Definieren Sie den Begriff "Vektorraum". (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

b) Es ist bekannt, dass die Menge $\mathcal{C}[a,b]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ einen Vektorraum bilden. Sind folgende Mengen Untervektorräume? Wenn ja, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein geeignetes Gegenbeispiel.

   i) $U_1 = \{f \in \mathcal{C}[a,b] \mid \int_a^b f(x)\,dx = 0\}$

   ii) $U_2 = \{f \in \mathcal{C}[a,b] \mid f(a) \cdot f(b) = 0\}$