Musterlösung

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2013, am 11.07.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $det(A)$, $det(A^T)$, $det(2 \cdot A)$ und $det(A^2)$.

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(0 - 6 - 6 - (-4 + 0 - 2))$$

$$= -2\,(-12 + 6)$$

$$= -2 \cdot (-6)$$

$$= 12 \quad 3$$

$$\det(A^T) = \det(A) = 12 \quad 3$$

$$\det(2 \cdot A) = 2^4 \cdot \det(A) = 16 \cdot 12 = 192 \quad 3$$

$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = 12^2 = 144 \quad 3$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix A eine Orthogonalmatrix ist.

b) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

a)

$$A A^T = A^T \cdot A = E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

8

ODER:

$$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad \& \quad \|\vec{a}_i\|_2 = 1$$

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_1\|_2 = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_3\|_2 = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

8

$\Rightarrow$ A ist eine Orthogonalmatrix

b) Da A Orthogonalmatrix, gilt $A^{-1} = A^T$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es wird erwartet, dass die Rechenzeit $T(n)$ eines bestimmten Programmes exponentiell mit der Eingabegröße n ansteigt, so dass

$$T(n) = \tilde{a} \cdot \exp(b \cdot n).$$

Mit Hilfe einer Logarithmierung kann aus dem exponentiellen ein lineares Problem erzeugt werden:

$$L(n) := \ln(T(n)) = \underbrace{\ln(\tilde{a})}_{a} + b \cdot n.$$

Bestimmen Sie Schätzwerte für die Parameter a und b mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression) und der folgenden Beobachtungen:

Problemgröße n	0	1	2
Rechenzeit $T(n)$ [s]	exp(0)	exp(1)	exp(3)
log. Rechenzeit $L(n)$ [s]	0	1	3

Bestimmen Sie auch den rücktransformierten Schätzwert für $\tilde{a}$.

$$L(0) = a + b \cdot 0 = a = 0$$
$$L(1) = a + b \cdot 1 = a + b = 1$$
$$L(2) = a + b \cdot 2 = a + 2b = 3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2$$

Normalgleichung:

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad 2$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad 1$$

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}\right) -I$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) :2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) -3II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) :3$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$ 4

$$\Rightarrow L(n) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2}n$$

$$a = \ln(\hat{a})$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = e^{a} = e^{-1/6} = \frac{1}{e^{1/6}}$$ 2

$$\Rightarrow T(n) = \frac{1}{e^{1/6}} \cdot \exp\left(\frac{3}{2}n\right)$$

Aufgabe 4

Ein Biologiestudent arbeitet an einer Studie über eine Käferart. Die Käfer entwickeln sich in drei Stadien: Als Ei, als Larve und als ausgewachsener Käfer. Man weiß nun, dass sich aus einer gegebenen Population $(a_E, a_L, a_K)^T$ nach einem bestimmten Zeitabschnitt die Population

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

entwickelt. Dabei bezeichnet $(a_E, a_L, a_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer zu Beginn und $(e_E, e_L, e_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer am Ende des Zeitschritts.

Der Biologiestudent hat nun am Ende des Zeitschritts

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

erhalten. Leider sind ihm die Daten $(a_E, a_L, a_K)^T$ des vorherigen Zeitabschnitts abhanden gekommen. Helfen Sie dem Biologiestudenten und berechnen Sie die ~~Anfangs~~Population $(a_E, a_L, a_K)^T$.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

6

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 50 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 50 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} :0{,}4 = \frac{2}{5} \;/\cdot \frac{5}{2} \\ :0{,}9 = \frac{9}{10} \;/\cdot \frac{10}{9} \\ :50 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/50 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 10/9 \\ 1/50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/2 \cdot 32 \\ 10/9 \cdot 18 \\ 1/50 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 16 \\ 10 \cdot 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 6$$

ODER:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} :50 \\ :0{,}4 = 2/5 \;/\cdot 5/2 \\ :0{,}9 = 9/10 \;/\cdot 10/9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 32 \cdot 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \cdot 10/9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 6$$

Aufgabe 5

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ 3x + y + \alpha z &= 11 \end{aligned}$$

keine Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

i)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -17 \\ 0 & -5 & \alpha-9 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 4 \end{array}\right)$$

6

$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ 2

Für $\alpha = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \lightning$$

$\Rightarrow$ keine Lösung 1

(ii) Für $\alpha = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z = 4$

$\Rightarrow 5y = 17 - 8z = 17 - 8 \cdot 4 = 17 - 32 = -15$

$\Leftrightarrow y = -3$

$\Rightarrow x = 8 - 3z - 2y = 8 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)$

$= 8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4

Aufgabe 6

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten Sie das *arithmetische Mittel*

$$M((a,b)^T) = \frac{1}{2}(a+b).$$

a) Zeigen Sie: $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix! Wählen Sie dazu Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und geben Sie diese mit an.

c) Bestimmen Sie den Kern von M.

d) Definieren Sie für eine beliebige Abbildung f ~~zwischen beliebigen Vektorräumen~~ die Begriffe "surjektiv" und "injektiv"!

e) Ist die Abbildung M injektiv und surjektiv?

a) Additivität: $M(\vec{x}+\vec{y}) \overset{!}{=} M(\vec{x}) + M(\vec{y})$

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$M(\vec{x}+\vec{y}) = M\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}((x_1+y_1)+(x_2+y_2))$$

$$= \frac{1}{2}((x_1+x_2)+(y_1+y_2))$$

$$= \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

$$= M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + M\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= M(\vec{x}) + M(\vec{y}) \quad ✓ \quad (1)$$

Homogenität: $M(\lambda\vec{x}) \overset{!}{=} \lambda M(\vec{x})$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$M(\lambda\vec{x}) = M\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(\lambda x_1 + \lambda x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lambda(x_1+x_2) = \lambda \cdot M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda M(\vec{x})$$

$\Rightarrow M$ ist eine lineare Abbildung (1)

b) Basis im $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (kanonische Basis) 1

Basis im $\mathbb{R}$: $\{1\}$ 1

$M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

$M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2

c) $A\vec{x} = 0$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \quad \cdot 2$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array} \quad - \mathrm{II}$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}$

Kern (M) / Kern (A)

$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ 3

d) Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt <u>surjektiv</u>, falls $f(V) = W$, d.h. für jedes $y \in W$ gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = y$. 1

Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt <u>injektiv</u> oder eineindeutig, falls $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ bzw. $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$ ist. 1

e)

Abbildung f ist nicht injektiv, da
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \vec{v}$, aber
$f(\vec{u}) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$ und $f(\vec{v}) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$
somit $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$. ↯ 1

Abbildung f ist surjektiv, da jeder Wert aus dem Wertebereich von einem oder mehreren Werten aus dem Definitionsbereich erreicht wird. 1

Aufgabe 7

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spiegelt Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse.

a) Fertigen Sie eine Skizze an und verdeutlichen Sie darin den Vektor $(1, 2)^T$ und seine Abbildung.

b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix zu f auf.

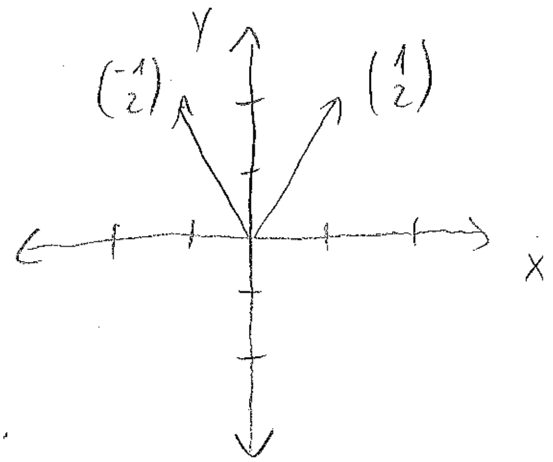
c) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_1 der Vektoren, die auf ihr 1-faches, also auf sich selbst, abgebildet werden.

d) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_{-1} der Vektoren, die auf ihr (-1)-faches abgebildet werden.

e) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die beiden Zahlen 1 und -1?

f) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die Elemente der beiden Mengen ~~M_1 und M_{-1}~~?
$M_1 \setminus \{0\}$ und $M_2 \setminus \{0\}$?

a)



3

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

c)

$$A\vec{x_1} = \lambda_1 \vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x_1} = \vec{x_1}$$

$$\Leftrightarrow (A - E)\vec{x_1} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) :(-2) \qquad \Rightarrow \vec{x_1} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \qquad \Rightarrow M_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

d) $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 = -1 \cdot \vec{x}_2 = -\vec{x}_2$

$\Leftrightarrow (A+E)\vec{x}_2 = \vec{0}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) :2 \qquad \Rightarrow \vec{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow M_2 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \beta \in \mathbb{R}\}$ 3

e) Die Zahlen 1 und -1 sind die Eigenwerte der Matrix. 1

f) Die Mengen M_1 und M_{-1} sind die Mengen der Eigenvektoren zum jeweiligen Eigenwert. 1

Aufgabe 8

Untersuchen Sie die Möglichkeit einer Zerlegung der Form $A = B^2$ positiv definiter symmetrischer Matrizen A anhand der folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass
$$A_+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
positiv definit ist.

b) Diagonalisieren Sie A_+.

c) Zeigen Sie, dass für A_+ die Zerlegung $A_+ = {B_+}^2$ möglich ist, indem Sie B_+ bestimmen.

d) Beweisen Sie: Jede positiv definite symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat eine Zerlegung $A = B^2$. Konstruieren Sie eine solche Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $\det(a_{11}) = \det(2) = 2 > 0$

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow A_+$ ist positiv definit (3)

b) $A_+ = QDQ^{-1}$

bzw. $A_+ = QDQ^T$ (Q Orthogonalmatrix)

Q: Spaltenvektoren sind (normierte) Eigenvektoren

D: Diagonalelemente sind Eigenwerte (auf die Reihenfolge achten!) (1)

$\det(A - \lambda E) = 0$ (bzw. $\det(\lambda E - A) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)^2 - 1$ $= (\lambda-2)^2 - 1$)

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1$$
$$\Rightarrow 2-\lambda = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = 1 \qquad 2$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ +I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) +II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{array}\right) -II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \beta \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2$$

Q & D

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A_+ = B^2 = QDQ^T$$

$$= Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$

$$= Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T \cdot Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$

$$\Rightarrow B = Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix} \quad 2$$

d)

A ist symmetrisch

$\Rightarrow$ Basis aus Eigenvektoren, $A = QDQ^T$

A positiv definit

$\Rightarrow$ alle Eigenwerte positiv und > 0

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \begin{pmatrix}\sqrt{1} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$A = QDQ^T$$

$$= Q\cdot\sqrt{D}\cdot\sqrt{D}\cdot Q^T = Q\sqrt{D}Q^T \cdot Q\sqrt{D}Q^T = B^2$$

$$\Rightarrow B = Q\sqrt{D}Q^T \quad 2$$