FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2013, am 11.07.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $det(A)$, $det(A^T)$, $det(2 \cdot A)$ und $det(A^2)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix A eine Orthogonalmatrix ist.

b) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 3

Es wird erwartet, dass die Rechenzeit $T(n)$ eines bestimmten Programmes exponentiell mit der Eingabegröße n ansteigt, so dass

$$T(n) = \tilde{a} \cdot \exp(b \cdot n).$$

Mit Hilfe einer Logarithmierung kann aus dem exponentiellen ein lineares Problem erzeugt werden:

$$L(n) := \ln(T(n)) = \underbrace{\ln(\tilde{a})}_{a} + b \cdot n.$$

Bestimmen Sie Schätzwerte für die Parameter a und b mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression) und der folgenden Beobachtungen:

Problemgröße n	0	1	2
Rechenzeit $T(n)$ [s]	$\exp(0)$	$\exp(1)$	$\exp(3)$
log. Rechenzeit $L(n)$ [s]	0	1	3

Bestimmen Sie auch den rücktransformierten Schätzwert für $\tilde{a}$.

Aufgabe 4

Ein Biologiestudent arbeitet an einer Studie über eine Käferart. Die Käfer entwickeln sich in drei Stadien: Als Ei, als Larve und als ausgewachsener Käfer. Man weiß nun, dass sich aus einer gegebenen Population $(a_E, a_L, a_K)^T$ nach einem bestimmten Zeitabschnitt die Population

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

entwickelt. Dabei bezeichnet $(a_E, a_L, a_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer zu Beginn und $(e_E, e_L, e_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer am Ende des Zeitabschnitts.

Der Biologiestudent hat nun am Ende des Zeitabschnitts

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

erhalten.

Leider sind ihm die Daten $(a_E, a_L, a_K)^T$ des vorherigen Zeitabschnitts abhanden gekommen. Helfen Sie dem Biologiestudenten und berechnen Sie die Population $(a_E, a_L, a_K)^T$.

Aufgabe 5

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ 3x + y + \alpha z &= 11 \end{aligned}$$

keine Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

Aufgabe 6

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten Sie das *arithmetische Mittel*

$$M((a,b)^T) = \frac{1}{2}(a+b).$$

a) Zeigen Sie: $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix! Wählen Sie dazu Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und geben Sie diese mit an.

c) Bestimmen Sie den Kern von M.

d) Definieren Sie für eine beliebige Abbildung f die Begriffe "surjektiv" und "injektiv"!

e) Ist die Abbildung M injektiv und surjektiv?

Aufgabe 7

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spiegelt Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse.

a) Fertigen Sie eine Skizze an und verdeutlichen Sie darin den Vektor $(1,2)^T$ und seine Abbildung.

b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix zu f auf.

c) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_1 der Vektoren, die auf ihr 1-faches, also auf sich selbst, abgebildet werden.

d) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_{-1} der Vektoren, die auf ihr (-1)-faches abgebildet werden.

e) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die beiden Zahlen 1 und -1?

f) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die Elemente der beiden Mengen $M_1 \setminus \{0\}$ und $M_{-1} \setminus \{0\}$?

Aufgabe 8

Untersuchen Sie die Möglichkeit einer Zerlegung der Form $A = B^2$ positiv definiter symmetrischer Matrizen A anhand der folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass
$$A_+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
positiv definit ist.

b) Diagonalisieren Sie A_+.

c) Zeigen Sie, dass für A_+ die Zerlegung $A_+ = {B_+}^2$ möglich ist, indem Sie B_+ bestimmen.

d) Beweisen Sie: Jede positiv definite symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine Zerlegung $A = B^2$. Konstruieren Sie eine solche Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.