Yvonne Nix, Jürgen Dietel, Gerrit Kiefer, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Aufgaben - Relationen, Abbildungen und Funktionen

Relationen

1.) a) Welche Eigenschaften müssen für eine Äquivalenzrelation gelten?

b) Gegeben ist die Relation $x \sim y$, falls $x \cdot y > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^{\neq 0}$
Überpruefen Sie, ob diese den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation genügt! Geben Sie nicht nur den Fachbegriff sondern auch die Mathematische Schreibweise oder ein Beispiel an!

2.) a) Gegeben sei die Relation $x \sim y$, falls $|x - y| \leq 3,\ x, y \in \mathbb{R}$.
Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation? Falls nicht, begründen Sie ggf. mathematisch oder mit einem Beispiel, welche Eigenschaften verletzt werden!

b) Was ändert sich, falls für die Relation $x \sim y$ die Vorschrift $x - y \leq 3$ gegeben ist?

3.) $n \in \mathbb{Z}$ sei in Relation mit $m \in \mathbb{Z}$ dann und nur dann, wenn $(n - m)$ durch 13 teilbar ist.

a) Zeigen Sie: Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.

b) Welche sind die Äquivalenzklassen dieser Relation?

4.) Es sei folgende Relation auf den Vokalen $\{a, e, i, o, u\}$ gegeben:

$$R = \{(a,a), (e,e), (i,i), (o,o), (u,u), (a,u), (u,a), (u,o), (o,u), (e,i)\}$$

a) Skizzieren Sie die Relation als Pfeildiagramm.

b) Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation hat diese Relation?

c) Ergänzen Sie mit möglichst wenigen zusätzlichen Beziehungen die Relation zu einer Äquivalenzrelation und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

Abbildungen und Funktionen

1.) Gegeben ist folgende Funktion mit der Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^- \\ -x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die vorliegende Funktion.

b) Beweisen Sie, dass die Funktion injektiv ist.

c) Argumentieren Sie, dass die Funktion surjektiv ist.

Hinweis: Für die Injektivität reicht es nicht die Definition hinzuschreiben. Für die Surjektivität helfen Stetigkeit und Monotonie weiter.

2.) Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x) = \sin(x), \ x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{W} = [-1; 1]$$

a) Zeichnen Sie die vorliegende Funktion auf dem Interval $[0; 2\pi]$ und untersuchen Sie die Funktion auf Injektivität.

b) Argumentieren Sie, warum die Funktion surjektiv ist.

c) Was ändert sich, wenn der Definitionsbereich auf $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ geändert wird?

3.) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ |x+1| & , x \geq 0 \end{cases}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze an.

4.) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = x^2 + 4$$

Polynome und Horner-Schema

1.) Das Polynom $x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10$ hat die Nullstellem $x = 2$ und $x = -1$. Berechnen Sie die anderen zwei Nullstellen des Polynoms, indem Sie das Polynom durch Anwendung des Horner-Schemas zweimal dividieren.

2.) a) Stellen Sie ein Polynom mit reellen Koeffizienten auf, welches i, sowie 1 und 2 als Nullstelle besitzt.

b) Bestimmen Sie den Funktionswert an der Stelle $x_0 = -1$ durch Anwendung des Horner-Schemas. Stellen Sie das Polynom nach Anwendung des Schemas erneut dar!

3.) Entwickeln Sie mit Hilfe des Horner-Schemas nach Potenzen von $(x-2)$:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$$

4.) Gegeben ist das Polynom $P(x) = x^3 - 3x^2 - 50$

a) Berechnen Sie mit dem Horner-Schema den Wert des Polynoms $P(x)$ für $x = 1, -2$ und 5.

b) Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms $P(x)$.

5.) Bestimmen Sie mit dem Horner-Schema die Zahlen a_k, $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ so, dass gilt:

$$2x^4 - 5x^3 + 8x^4 + 3x^2 - x + 9 = \sum_{k=0}^{4} a_k \, (x-3)^k$$

6.) Gegeben sei das Polynom

$$6x^4 + x^3 - 23x^2 + 4x + 12$$

Dividieren Sie die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ mit Hilfe des Horner-Schemas ab und bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms.

7.) Entwickeln Sie mit Hilfe des Horner-Schemas nach Potenzen von $(x-1)$:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$