

Aufgaben zur Veranstaltung Tutorium Mathematik, WS 2015/2016

Yvonne Nix, Jürgen Dietel, Gerrit Kiefer, Lars Klöser

FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Aufgaben - Gruppen und Körper

- 1.) Überprüfen Sie, ob es sich bei der Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{Z}, +)$ um Gruppen handelt.
- 2.) Die Kleinsche Vierergruppe ist eine Menge M bestehend aus den vier Elementen $\{1, a, b, ab\}$, welche in folgendem Zusammenhang stehen:

\circ	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Warum liegt hier eine Abelsche Gruppe vor? Nutzen Sie für ihre Begründung die Ihnen bekannten Gruppenaxiome!

- 3.) Zeigen Sie, dass es sich bei den komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation um einen Körper handelt.
Weisen Sie hierzu nach, dass
 - a) die Menge der komplexen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe bildet
 - b) die Menge der komplexen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet
 - c) zusätzlich die Distributivität gilt, so dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.
- 4.) Auf der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} sei die Operation $\#$ definiert mit $a\#b = a + b + 1$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \#)$ eine Gruppe ist.
- 5.) Zeigen Sie: Die ganze Zahlen, die durch 7 teilbar sind, bilden eine kommutative Gruppe.