Aufgaben zur Veranstaltung
Tutorium Mathematik, WS 2014/2015

Janine Federer, Yvonne Nix, Rebecca Sarholz FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 07: Gruppen und Körper 09.12.2014

1.) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Zahlenmengen und den entsprechenden Verknüpfungen um Gruppen handelt:

a) Die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{Z}, +)$
b) Die Menge der ganzen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) Die Menge der natürlichen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{N}, +)$
d) Die Menge der rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{Q}, +)$
e) Die Menge der reellen Zahlen ohne die Null mit der Multiplikation als Verknüpfung $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

2.) Gegeben ist die Verknüpfung $\circ$ und zwei von eins verschiedene reelle Zahlen x, y, für die folgende Beziehung gilt:

$$x \circ y = x + y - xy$$

Handelt es sich hier um eine Gruppe?
Hinweis: Überprüfen Sie für die Abgeschlossenheit, wann $x \circ y = 1$ gilt.

3.) Die Kleinsche Vierergruppe ist eine Menge bestehend aus den vier Elementen $\{1, a, b, ab\}$, welche in folgendem Zusammenhang stehen:

$\circ$	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Warum liegt hier eine Abelsche Gruppe vor?
Nutzen sie für ihre Begründung die Ihnen bekannten Gruppenaxiome!

4.) Die Quaternionengruppe ist eine Gruppe der Ordnung 8.
Sie besteht den acht Elementen $\{\pm 1,\ \pm i,\ , \pm j,\ \pm k\}$, welche in folgender Beziehung zueinander stehen:

$\circ$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	- k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Begründen Sie mit Hilfe der Axiome, warum eine Gruppe vorliegt. Die Assoziativität können Sie als erfüllt betrachten. Ist diese Gruppe kommutativ?

5.) Zeigen Sie, dass es sich bei den komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation um einen Körper handelt.

Weisen Sie hierzu nach, dass

a) die Menge der komplexen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe bildet

b) die Menge der komplexen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung $(\mathbb{C}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet

c) zusätzlich die Distributivität gilt, so dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.