Janine Federer, Yvonne Nix, Rebecca Sarholz — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 05: Relation, Abbildung, Funktion — 25.11.2014

1.) a) Welche Eigenschaften müssen für eine Äquivalenzrelation gelten?

b) Gegeben ist die Relation $x \sim y,\ falls\ x \cdot y > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^{\neq 0}$
Überpruefen Sie, ob diese den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation genügt! Geben Sie nicht nur den Fachbegriff sondern auch die Mathematische Schreibweise oder ein Beispiel an!

2.) Die natürlichen Zahlen $a > 1$ und $b > 1$ stehen in Relation wenn gilt:
$ggT(a, b) \geq 2$. Ist diese Relation

a) Reflexiv ?

b) Symmetrisch ?

c) Transitiv ?

Begründen Sie das. Für den Fall, dass eine der Eigenschaften a) bis c)
nicht gilt, geben Sie ein Beispiel an.

3.) Gegeben sei die Relation $x \sim y$, falls $|x - y| \leq 3,\ x, y \in \mathbb{R}$.
Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation?
Falls nicht, begründen Sie ggf. mathematisch oder mit einem Beispiel, welche Eigenschaften verletzt werden!
Was ändert sich, falls $x - y \leq 3$ gegeben ist?

4.) Gegeben seien die Mengen

$$A = \{\text{Vater, Mutter, Sohn, Tochter}\}, \quad B = \{1948, 1976, 1950, 1978\}$$

sowie die Abbildung

$$f : A \ni x \to f(x) = \text{Jahrgang von } x \in B.$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen die Abbildungsvorschrift f erfüllen und ob die Abbildungen injektiv, surjektiv sowie bijektiv sind.

a) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978

b) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1975, Tochter hat Jahrgang 1978

c) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

5.) Gegeben ist folgende Funktion mit der Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^- \\ -x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Zeichen sie die vorliegende Funktion.
Beweisen Sie, dass die Funktion injektiv ist! Argumentieren Sie, dass die Funktion surjektiv ist!

Hinweis: Für die Injektivität reicht es nicht die Definition hinzuschreiben und zu behaupten, es sei so...
Für die Surjektivität helfen Stetigkeit und Monotonie weiter.

6.) Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x) = \sin(x), \ x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{W} = [-1; 1]$$

Zeichnen sie die vorliegende Funktion auf dem Interval $[0; 2\pi]$ und
untersuchen Sie die Funktion auf Injektivität!
Argumentieren Sie, warum die Funktion surjektiv ist!

Was ändert sich, wenn der Definitionsbereich auf $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ geändert wird?

7.) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ |x+1| & , x \geq 0 \end{cases}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze an.

8.) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = x^2 + 4$$

9.) Das Polynom $x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10$ hat die Nullstellem $x = 2$ und $x = -1$. Man berechne die andere zwei Nullstellen des Polynoms, indem man das Polynom durch Anwendung des <u>Horner-Schemas</u> zweimal dividiert.

10.) a) Stellen Sie ein Polynom mit reellen Koeffizienten auf, welches i, sowie 1 und 2 als Nullstelle besitzt.

b) Bestimmen Sie den Funktionswert an der Stelle $x_0 = -1$ durch Anwendung des Hornerschemas. Stellen Sie das Polynom nach Anwendung des Schemas erneut dar!